

3D and 4D data processing with quaternion tensor decompositions

Context The efficient processing of 3D and 4D data is pivotal in many applications such as robotics, color and polarization imaging or attitude control, among others. Such multichannel data is often represented using quaternions – a generalization of complex numbers in four dimensions - in order to simplify expressions and leverage unique geometric and physical insights offered by this algebraic representation. When 3D/4D data is measured along multiple diversities (e.g. time, frequency, space, etc.), datasets can be viewed as multidimensional quaternion arrays – also called *quaternion tensors*.

Summary While quaternion tensors can encode in a compact and meaningful way 3D/4D datasets, they define a challenging mathematical object for which little results are currently available. This can be explained by the noncommutativity of quaternion multiplication, which prevents a direct use of the tensor methods originally developed for real and complex tensors [1]. Yet, motivated by recent results in constrained quaternion matrix factorizations [2], we have proposed a rigorous framework to perform quaternion tensor decompositions. This M2R internship will take advantage of this new framework and develop *efficient algorithms to perform quaternion tensor decompositions*. As a first task, the candidate will focus on the quaternion canonical polyadic decomposition (CPD), a fundamental tool that allows a decomposition of quaternion tensor in rank-one terms. He will develop and compare the performances of two categories of algorithms performing quaternion CPD: (i) based on a real-constrained tensor reformulation, inspired by [3], and (ii) full-quaternion domain algorithms. In addition, he/she will apply the proposed methodology to the study of real datasets from several applications, such as color imaging (3D data) and polarization imaging (4D) data. One key objective will be to benchmark performances of quaternion tensor decompositions against standard real-domain tensor decompositions.

This internship can be followed by a Ph.D research project starting October, 2022, at CRAN, Nancy (more details)

Candidate profile He/she should be enrolled in a M2R or engineer diploma in one or more of the following fields: signal and image processing, machine learning, applied mathematics. The candidate should have good writing and oral communication skills.

Supervision and environment This M2R internship will be jointly supervised by Julien Flamant (CNRS research scientist), Sebastian Miron (Associate Professor at Université de Lorraine), Xavier Luciani (Associate Professor at Seatech, Université de Toulon) and Yassine Zniyed (Associate Professor at Seatech, Université de Toulon) Depending on its preferences, the candidate will be either located at CRAN, Nancy or either at LIS, Toulon.

Please contact Julien Flamant, julien.flamant@univ-lorraine.fr or Xavier Luciani, luciani@univ-tln.fr

References

- [1] T. G. Kolda and B. W. Bader, “Tensor decompositions and applications,” *SIAM review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, 2009.
- [2] J. Flamant, S. Miron, and D. Brie, “Quaternion non-negative matrix factorization: Definition, uniqueness, and algorithm,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 68, pp. 1870–1883, 2020.
- [3] A. L. De Almeida, X. Luciani, A. Stegeman, and P. Comon, “Confac decomposition approach to blind identification of underdetermined mixtures based on generating function derivatives,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5698–5713, 2012.

Décomposition de tenseurs de quaternions pour l'analyse de données 3D et 4D

Contexte L'analyse de signaux ou de données 3D ou 4D joue un rôle clef dans plusieurs domaines d'applications tels que la robotique, l'imagerie polarisée ou encore le contrôle d'attitude. Les quaternions, en tant que généralisation des nombres complexes à quatre dimensions, permettent une représentation algébrique compacte de telles données, simplifiant les expressions mathématiques et ouvrant la voie à de nouvelles interprétations physiques et géométriques. Lorsque les données 3D/4D à traiter varient en fonction de plusieurs diversités (par ex. le temps, la fréquence, l'espace, etc.) celles-ci peuvent être rangées dans un tableau de quaternions multidimensionnel, que l'on appelle *tenseur de quaternions*.

Sujet du stage Bien que les tenseurs de quaternions permettent une représentation compacte et pertinente des données 3D/4D, ils n'en restent pas moins des objets mathématiques difficile à manipuler et sur lesquels peu de résultats sont disponibles. En particulier, la non-commutativité de la multiplication de deux quaternions empêche l'utilisation directe des méthodes classiques de décomposition de tenseurs réels ou complexes [1]. Cependant, en s'appuyant sur nos récents travaux sur les factorisations sous contraintes de matrices de quaternions [2], nous avons pu donner un cadre théorique rigoureux à la décomposition de tenseurs de quaternions. Ce stage de M2 s'appuiera donc sur ces résultats afin de proposer et développer *des algorithmes efficaces de décomposition de tenseurs de quaternions*. Dans un premier temps, le (la) stagiaire se concentrera sur la décomposition canonique polyadique (CPD), un outil fondamental permettant de définir le rang d'un tenseur et de le décomposer en une somme de tenseurs de rang 1. Il développera et comparera les performances de deux catégories d'algorithmes pour la CPD quaternionique: a) les algorithmes fondés sur sa reformulation de la CPD quaternionique comme une décomposition réelle sous contraintes, inspirée par [3] ; b) les algorithmes travaillant directement sur l'ensemble non-commutatif des quaternions. Ensuite il (ou elle) appliquera cette approche à l'analyse de données réelles issues de différentes applications telles que l'imagerie couleur (données 3D) ou l'imagerie polarisée (données 4D) et comparera les performances de l'approche proposée avec les approches standards.

Ce stage pourra être suivi d'une thèse de doctorat au CRAN à Nancy (octobre 22) (sujet)

Profil recherché Le (la) candidat(e) doit être actuellement en M2 et/ou dernière année d'école d'ingénieurs dans l'un des domaines suivants: traitement du signal et/ou des images, machine learning, mathématiques appliquées, et posséder de bonnes qualités d'expression à l'oral et à l'écrit.

Encadrement et contacts Le stagiaire dépendra des laboratoires CRAN (Université de Lorraine) et LIS (Université de Toulon). Il sera co-encadré par Julien Flamant (chargé de recherche CNRS, CRAN), Sebastian Miron (MCF, CRAN), Xavier Luciani (MCF, LIS) et Yassine Zniyed (MCF, LIS) Le stage pourra se dérouler au choix dans l'un ou l'autre des laboratoires, à Nancy ou à Toulon.

Contact Julien Flamant (julien.flamant@univ-lorraine.fr) ou Xavier Luciani (luciani@univ-tln.fr)

References

- [1] T. G. Kolda and B. W. Bader, "Tensor decompositions and applications," *SIAM review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, 2009.
- [2] J. Flamant, S. Miron, and D. Brie, "Quaternion non-negative matrix factorization: Definition, uniqueness, and algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 68, pp. 1870–1883, 2020.
- [3] A. L. De Almeida, X. Luciani, A. Stegeman, and P. Comon, "Confac decomposition approach to blind identification of underdetermined mixtures based on generating function derivatives," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 11, pp. 5698–5713, 2012.